P- ISSN 1991-8941 , E-ISSN 2706-6703 (JUAPS) مجلة جامعة الانبار للعلوم الصرفة Open Access
2009 ,(3), (3) :203-207

الطريقة المطورة لتقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية

عباس احمد حسن* وليد خالد جابر**

*الجامعة التكنولوجية/ قسم العلوم التطبيقية
**جامعة ذي قار/كلية العلوم

معلومات البحث:
تاريخ التسليم: ٢٠٠٩/١٢/٠١
تاريخ القبول: ٢٠٠٩/١٢/٢٤
تاريخ النشر: ١٤/ ٠٦ / ٢٠١٢

DOI: 10.37652/juaps.2009.15581

الكلمات المفتاحية:
طريقة مطورة ،
تقريب ،
دالة الهدف ،
مسائل البرمجة الكسرية

الخلاصة:
طريقة تقريب دالة الهدف هي إحدى طرائق بحوث العمليات لحل مسائل البرمجة الكسرية، حيث ت الحل اسلوب المراحل والتقريب لدالة الهدف.هدف البحث هو تطوير هذه الطريقة، وقد تمكنا من اختزال ع والجداول التي اعتمدت في هذه الطريقة إلى حد بعيد. وتضمن البحث برنامجاً شاملاً أو الحقيبة (kage (فيجوال بيسك) (Microsoft Visual Basic) يمكن من خلاله استخدام طريقة تقريب دالة الهدف، والطر لها لحل مسائل البرمجة الكسرية بسهولة وسرعة كبيرتين.

١- طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية

المقدمة [١],[2],[٣] : حين تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين وقيود المسألة خطية ومتغيراتها غير سلبية ، تدعى المسألة حينئذ بمسألة البرمجة الخطية .المالمسألة يتناول

إن طريقة تقريب دالة الهدف هي إحدى طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية في بحوث العمليات ، حيث تعتمد طريقة الحل ، اسلوب المراحل والتقريب لدالة الهدف ، إذ تضع في البداية تقريباً معينا لدالة الهدف كحل أولي لها ثم يعوض هذا الحل في النموذج الرياضي ونعوّضهُ بالأنموذج الرياضي ويتم الحل بعدها بالطريقة المبسطة إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل ثم يوضع تقريب جديد لدالة الهدف نضعهُ في الأنموذج الرياضي مرة أخرى ونستمر بالحل ، فإذا كان ناتج الحل هو الحل السابق نفسه نتوقف وسيكون هذا الحل هو الحل الأمثل أما إذا كان عكس ذلك نضع تقريباً جديداً لدالة الهدف وتكرر الحالة لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

فإذا عبّرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بالأنموذج الرياضي الآتي:

$$Max\, Z = \frac{cx+\alpha}{dx+\beta} \quad \dots (1.1)$$

على وفق القيود الآتية:

$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

حيث إن :

x : تمثل المتغيرات في دالة الهدف والقيود للأنموذج الرياضي .

C : تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة هدف البسط .

D : تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة هدف المقام .

α & β : تمثلان الحدود المطلقة في دالة هدف البسط ، و دالة هدف المقام على التوالي.

A : تمثل مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود المسألة .

b : مصفوفة الحدود المطلقة لقيود المسألة .

خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف:[1] ,[2]

إن خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف تتم على وفق الخطوات الآتية :

١- حساب قيمة L(x) من المعادلة الآتية :

$$L(x) = \frac{\langle C, D\rangle}{\langle D, D\rangle} \quad \dots (1.2)$$

حيث إن

$$\langle C, D\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\, d_i$$

* Corresponding author at: University of Technology/Department of Applied Sciences, Baghdad, Iraq;
ORCID:
E-mail address:

$$\langle D,D\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

٢- نحول دالة الهدف الكسرية إلى دالة هدف خطية مقربة وذلك بعد تعويض قيمتها في المعادلة الآتية :

$$Max\ F = \langle c_j - L(x) * d_j \ ,\ x_j \rangle \ldots (1.3)$$

$$j = 1,\ldots,n$$

حيث إن (F) هو اسم جديد للدالة الخطية المقربة .

ثم تضاف قيود المسألة الأصلية :

$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

٣- تحل دالة الهدف الجديدة مع قيود المسألة بالطريقة المبسطة كأنموذج برمجة خطية إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل Optimal solution. وسنحصل عندها على قيم xj، j = 1,2,…., n

٤- نعوض قيم xj الناتجة عن الحل الأمثل بالطريقة المبسطة للحصول على قيمة L(x*) = Max Z

٥- نجري مقارنة بين L(x) و L(x*) إذا كانت L(x)= L(x*)نتوقف ويكون الناتج هو الحل للمسألة ، وبخلافه سوف نكّون دالة هدف جديدة (F) بالاعتماد على L(x*) في معادلة (1.3) ونُعيد استعمال الطريقة المبسطة من جديد إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل واستخراج قيمة L(x**) ومقارنتها مع قيمة L(x*) فإذا كانت متساوية نتوقف وبخلافه يتم استخراج دالة هدف جديدة بالاعتماد على L(x**) وتعاد الخطوات السابقة نفسها باستعمال الطريقة المبسطة إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل وهكذا … ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي :

مثال (1.1)

حل الأنموذج الرياضي التالي :

$$Max\ Z = \frac{5x_1 + 2x_2 + x_3 + 1}{3x_1 + 2x_2 + x_3 + 1}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل //

$$C = (5,2,1),\ D = (3,2,1),\ \alpha = 1,\ \beta = 1$$

$$\langle D,D\rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

$$\langle C.D\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\, d_i = 5*3 + 2*2 + 1*1 = 20$$

المرحلة الأولى

$$L(x) = \frac{\langle C,D\rangle}{\langle D,D\rangle} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7} = 1.42$$

$$Max\ F = \langle c_i - L(x) * d_i \ ,\ x_i \rangle$$

Max F = (5 – 1.42 * 3) x1 + (2 – 1.42 * 2) x2 + (1 -1.42 * 1) x3

= 0.74 x1 - 0.84 x2 - 0.42 x3

Max F = 0.74 x1 - 0.84 x2 - 0.42 x3

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

نحول الأنموذج الرياضي أعلاه إلى الصيغة القياسية :

F - 0.74 x_1 + 0.84 x_2 + 0.42 x_3= 0

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + S_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 6 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

ونحل هذا الأنموذج بالطريقة المبسطةحيث ننظم الجدول الأول

جدول (1.1.1)

basic	v	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
F	0	- 0.71	0.85	0.42	0	0
S_1	4	3	4	1	1	0
S_2	6	1	2	5	0	1

C =1, R=1

ومن ثم حساب قيم الجدول الثاني

جدول (1.1.2)

basic	v	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
F	0.95	0	1.80	0.66	0.23	0
x_1	1.33	1	1.33	0.33	0.33	0
S_2	4.66	0	0.66	4.66	-0.33	1

ويكون الحل الأمثل هو :

, x 2= 0 , x3= 0 x 1= 1.333

$$\therefore Z = \frac{5(1.333)+0+0+1}{3(1.333)+0+0+1} = \frac{7.665}{4.999}$$
$$= 1.5333 = L(x^*)$$

$$\because L(x) = 1.42 \ne L(x^*)$$

لذا سنكون دالة هدف جديدة بالاعتماد على $L(x^*)$ بمرحلة جديدة كالآتي :

المرحلة الثانية :

Max F = (5 – ١,٥٣٣٣ * 3) x1 + (2 – ١,٥٣٣٣ * 2) x2 + (1 - ١,٥٣٣٣ * 1) x3
= 0.4001 x1 - 1.0666 x2 – 0.5333 x3

Max F = 0.4001 x1 - 1.0666 x2 – 0.5333 x3

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\
& x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6 \\
& x_1 , \; x_2 , \; x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

نحول الأنموذج الرياضي أعلاه إلى الصيغة القياسية :

$$F - 0.4001\, x_1 + 1.0666\, x_2 + 0.5333\, x_3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 + S_1 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 6 \\
& x_1 , \; x_2 , \; x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

ونحل هذا الأنموذج بالطريقة المبسطة حيث ننظم الجدول الأول

جدول (1.1.3)

basic	v	x 1	x 2	x3	S 1	S 2
F	0	- 0.4	1.06	0.53	0	0
S1	4	3	4	1	1	0
S2	6	1	2	5	0	1

C =1, R=1

جدول (1.1.4)

basic	v	x 1	x 2	x3	S 1	S 2
F	0.53	0	1.60	0.66	0.13	0
x 1	1.3	1	1.33	0.33	0.33	0
S2	4.66	0	0.66	4.66	-0.33	1

ويكون الحل الأمثل هو :

x 1= 1.333 , x 2= 0 , x3= 0 ,

$$\therefore Z = \frac{5(1.333)+0+0+1}{3(1.333)+0+0+1} = \frac{7.665}{4.999} = 1.5333$$

$\therefore L(x^{**}) = L(x^*)$ وعليه نتوقف ويكون

الحل الأمثل بمرحلتين وأربع جداول هو :

x 1= 1.333 , x 2= 0 , x3= 0 , Max Z = 1.5333

٢- الطريقة المطورة لطريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية

المقدمة:

يمكننا تطوير طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية التي كانت تُحل بمراحل متعددة وبعدد كبير من الجداول كما لاحظنا في البند أعلاه ، لتحسين أداء هذه الطريقة وللإسراع في وصولها إلى الحل الأمثل ، فإذا عبرنا عن مساله البرمجة الكسرية بنفس الأنموذج الرياضي (١,١) في البند أعلاه تكون خوارزمية الحل لهذه الطريقة كالآتي :

خوارزمية حل الطريقة المطورة لطريقة تقريب دالة الهدف

١- نحول دالة الهدف الكسرية إلى دالة هدف خطية مقربة وذلك بعد تعويض قيمتها في المعادلة الآتية :

... (2.1)

$$Max\, F = \langle c_i - L(x) \times d_i \; , \; x_i \rangle$$

حيث إن (F) هو اسم جديد للدالة الخطية المقربة

٢- نستخرج أولا قيمة لـ L(x) وفق العلاقة الآتية

$$L(x) = Min\left(\frac{C_j}{d_j} \; , \; j = 1,2,\ldots,n\right) \quad \ldots(2.2)$$

حيث إن n تمثل عدد المتغيرات في الأنموذج الرياضي .

٣- يتم تعويض قيمة L(x) المختارة في المعادلة (1.2) بحيث تكون معاملات x1, x2 , … , xn غير سالبة .

٤- ستتكون لدينا دالة هدف جديدة مقربة (F) وبإضافة قيود الأنموذج الرياضي نفسها.

٥- يتم الحل بالطريقة المبسطة لحين الوصول إلى الحل الأمثل .

٦- يتم تعويض قيم xj الناتجة من الحل الأمثل في دالة الهدف الكسرية (الأصلية Z) للحصول على قيمة Z .

٧- تُقارن قيمة Z الناتجة من تعويض قيم xj في (٦) أعلاه مع قيمة L(x) المختارة في (٢,٢) أعلاه

أ- إذا كانت قيمةL(x) > Z نتوقف وتكون قيمة Z هي القيمة المثلى .

ب- أما إذا كانت قيمة L(x) < Z نجعل Z=L(x*) نستمر باختيار دالة هدف جديدة بالاعتماد على L(x*) ونستمر بالحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل .

مثال (٢,١)

P- ISSN 1991-8941 , E-ISSN 2706-6703 (JUAPS) مجلة جامعة الانبار للعلوم الصرفة Open Access
2009 ,(3), (3) :203-207

لو كان لدينا نفس الأنموذج الرياضي الرياضي للمثال (١،١) وكالآتي :

$$Max\ Z = \frac{5x_1+2x_2+x_3+1}{3x_1+2x_2+x_3+1}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1+4x_2+x_3 \le 4 \\ & x_1+2x_2+5x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

دنا حل هذا الأنم

دالة الهدف فيكون الحل

الحل //

$$C=(5,2,1), D=(3,2,1) \quad , \alpha=1 \quad ,\beta=1$$

$$Max\ F = \langle c_i - L(x)*d_i \quad , x_i \rangle \ldots (2.2)$$

$$L(x)=Min\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{1}=1$$

المرحلة الأولى

بالتعويض في المعادلة (٢،٢) يكون لدينا

$Max\ F = (5-1*3)x_1 + (2-1*2)x_2$

$+(1-1*1)x_3$

$Max\ F = 2x_1$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1+4x_2+x_3 \le 4 \\ & x_1+2x_2+5x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

نحول الأنموذج الرياضي أعلاه إلى الصيغة القياسية :

$F - ٢\, x_1 \qquad = 0$

ونحل هذا الأنموذج بالطريقة المبسطة حيث ننظم

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + S_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + S_2 &= 6 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الجدول الأول

جدول (2.1.1)

basic	v	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
F	٠	- 2	0	0	0	0
S_1	4	3	4	1	1	0
S_2	6	1	2	5	0	1

$C=1 , R=1$

ومن ثم نستخرج الجدول الثاني

جدول (2.1.2)

basic	v	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
F	2.66	0	2.66	0.66	0.66	0
x_1	1.33	1	1.33	0.33	0.33	0
S_2	4.66	0	0.66	4.66	-0.33	1

ويكون الحل الأمثل هو :

$x_1 = 1.333 \quad , \quad x_2 = 0 \, , \quad x_3 = 0$

$$\therefore Z = \frac{5(1.333)+0+0+1}{3(1.333)+0+0+1} = \frac{7.665}{4.999} = 1.5333$$

الآن نقارن بين قيمة (Z) الناتجة مع قيمة L(x) المختارة

١- إذا كانت قيمة L(x) < Z نتوقف وتكون قيمة Z هي القيمة المثلى.

٢- أما إذا كانت قيمة L(x) > Z نستمر باختيار دالة هدف جديدة بالاعتماد على L(x*) ونستمر بالحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل .

وبما إن قيمة

$Z = 1.28 \qquad > \qquad L(x) = 1$

لذا نتوقف ويكون الحل الأمثل وبمرحلة واحدة هو

$x_1 = 1.333 \, , \quad x_2 = 0 \, , \quad x_3 = 0 \, , Max\ Z = 1.5333$

يلاحظ اختزال عدد المراحل من مرحلتين إلى مرحلة واحدة وتقلص عدد الجداول من أربعة جداول إلى جدولين فقط .

وللتأكد من سرعة أداء الطريقة المطورة لتقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية أخذت مسائل متعددة سندرجها أدناه أشارت إلى إن هذه سرعة ودقة هذه الطريقة ومن هذه المسائل الآتي:

المسألة الأولى:

$$Max\ Z = \frac{2x_1+6x_2}{3x_1+4x_2+1}$$

$$\begin{aligned} S.t. \quad & 3x_1+5x_2 \ge 15 \\ & x_1+x_2 \le 9 \\ & 6x_1+4x_2 \ge 24 \\ & x_1+x_2 \le 7 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المسالة الثانية :

$$Max\ Z = \frac{5x_1+3x_2}{5x_1+2x_2+1}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 3x_1+5x_2 \le 15 \\ & 5x_1+2x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المصادر

1. G.R. Bitran and A.G. Novaes, linear programming with a fractional objective function, No. 21,P. 22 – 29, UN. Of Sao Paulo , Brazil, 1973.
2. Jason I., Integer Programming, Submitted in partial satisfaction of the requirements for Math. ,1999, http://ftp.sdsmt/~rwjohnso/IP.htm.

Linear Programming, Department of Mathematics, University of Dhaka, 2001.

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + S_1 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 6 \\ x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

3. Md. Ainul Islam & Mohammed Forhad Uddin, Equivalence , difference and failure of algorithms for solving Linear Fractional Programming problems, http://www. google.com, Fractional

مسألة (٣) :

THE DEVELOPMENT METHOD OF APPROXIMATION THE OBJECTIVE FUNCTION TO SOLVE FRACTIONAL LINEAR FRACTIONAL PROBLEMS.

ABBAS A. HASSAN WALEED KH. JABER

ABSTRACT:

Approximation of Fractional objective function one of methods to solve Fractional linear programming problems(F.L.P.P.) using steps and Approximation of objective function.

In this paper we development of this method (new methods to solve To Solve FLP)